racines : $\dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.(-28)}}{2}$ ⟨ -4, 7

$\boxed{\text{EXM}}$ Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 114 & 48 \\ 48 & 86 \end{pmatrix}$$

On suppose que A et B ont les mêmes valeurs propres.
Alors

$a =$ et $d =$?

① Calcul de valeurs propres de B : On veut les racines de

$$0 = \det(B - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} \frac{114}{25} - \lambda & \frac{48}{25} \\ \frac{48}{25} & \frac{86}{25} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \frac{114+86}{25}\lambda + \left(\frac{114 \cdot 86}{25^2} - \frac{48^2}{25^2}\right) = \lambda^2 - \frac{200}{25}\lambda + 12$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 12 \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Bq}}$ $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longrightarrow P_C(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{\mathrm{Tr}(C)}_{:= \alpha + \delta}\lambda + \det(C)$

② Calculer $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ -2 & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \overbrace{(a+d)}^{8}\lambda + \overbrace{(ad+2)}^{12}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-6)$$

HYP QUE $P_A(2) = P_A(6) = 0$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 12$$

Alors

$$\begin{cases} a+d = 8 \\ ad+2 = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+d=8 \\ a.d=10 \end{cases}$$

$\Rightarrow d = 8 - a \Rightarrow a.(8-a) = 10$ i.e. $a^2 - 8a + 10 = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 40}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{2} \begin{cases} \nearrow 4 - \sqrt{6} \\ \searrow 4 + \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Si} \begin{cases} a = 4 - \sqrt{6} \Rightarrow d = 8 - a = 8 - (4 - \sqrt{6}) = 4 + \sqrt{6} \\ a = 4 + \sqrt{6} \Rightarrow d = 8 - a = 8 - (4 + \sqrt{6}) = 4 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Rp}}$ $(a = 4 + \sqrt{6}$ et $d = 4 - \sqrt{6})$

ou

$(a = 4 - \sqrt{6}$ et $d = 4 + \sqrt{6})$. $\square$

$\boxed{\text{DEF}}$ Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de A

est l'ensemble formé de toutes les valeurs propres de A.
(§ 9.3.1)

Méthode de calcul de valeurs et vecteurs propres

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

① Calculer $P_A(\lambda)$ et ses racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

valeurs propres de A

② Pour chaque valeur propre λ_i on calcule une base de $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i . I_n)$

$\boxed{\text{EXM } 9.22}$ Calculer les valeurs propres et une base de chaque espace propre

pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

① Calcul de P_A et ses racines

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda . I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \left[(1-\lambda)^2 - 1 \right] + \left[\lambda - 1 - 1 \right] - \left[2 - \lambda \right]$$

$$= (1-\lambda) \left[\lambda^2 - 2\lambda \right] + 2 (\lambda - 2)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)\lambda + 2(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2) \left[\boxed{\lambda}(1-\lambda) + 2 \right] = (\lambda-2)\left(-\lambda^2+\lambda+2\right)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+1) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$\Longrightarrow$ les valeurs propres de A sont $\to 2 \in$ (avec mult. 2) ; $\to -1$

$\boxed{\text{Question}}$ Et si l'on calcule $P_A(\lambda)$ sans factoriser?

(e.g. $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$)

$\boxed{\text{Critère de Gauss}}$ Si $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ avec $a_n = \pm 1$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, alors toute racine $\in \mathbb{Q}$ est dans $\mathbb{Z}$ et divise a_0.

Dans notre polynôme $p = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$, toute racine $\in \mathbb{Q}$ de p est dans $\mathbb{Z}$ et divise -4 : les candidats pour racines de p sont $\pm 1, \pm 2, \pm 4$!!

Par exemple, $p(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = 0$

donc -1 est racine de p !

② $\boxed{\text{Pour } \lambda = -1}$ $\longrightarrow E_{-1} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\ldots} \underbrace{}_{\text{OEL}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FER

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Base de } E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $\lambda = 2$

$$E_2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2 - x_3} \Rightarrow E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base de } E_2}$$

DÉF 9.24

+

DÉF. 9.30

Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, λ_j est une valeur propre de A, on définit la multiplicité algébrique de λ_j comme la multiplicité de la racine λ_j dans $P_A(\lambda)$. ← Notation: $\mathrm{mult}_a(\lambda_j)$

$$\left(\text{i.e.} \quad (\lambda-\lambda_j)^{\mathrm{mult}_a(\lambda_j)} \mid P_A(\lambda) \quad \text{mais} \quad (\lambda-\lambda_j)^{\mathrm{mult}_a(\lambda_j)+1} \nmid P_A(\lambda) \right)$$

La multiplicité géométrique de λ_j (notation: $\mathrm{mult}_g(\lambda_j)$) est $\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I_n))$.

$\boxed{\text{THM 9.30}}$ $\text{mult}_g(\lambda_j) \leq \text{mult}_a(\lambda_j)$

pour toute valeur propre λ_j de $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(dans notre exemple 9.22 :

$\text{mult}_a(-1) = \text{mult}_g(-1) = 1$

$\text{mult}_a(2) = \text{mult}_g(2) = 2$)

$\boxed{\text{THM. 9.23}}$ Si : $\underbrace{A \sim B}$

(i.e. $\underbrace{A \text{ et } B \text{ semblables}}$)

$\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible t.q. $B = P^{-1}AP$

avec $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, alors $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

ça implique A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques.